VNĚJŠÍ KALKULUS

(* = kalkulus na asym. formách)

* použití antisym. forem
  * symplektická geometrie (geom. fáz. prostoru, symp. forma → Poiss. záv.) (uzavřená 2-forma)
  * Cartanův kalkulus (výpočet křivosti z ON. báze metriky pomocí forem)
  * Cliffordova algebra (reprezentace pomocí vnější algebry → Dirac. spinory)
  * elmag. pole ($F = dA$, Maxwell. rovnice pomocí forem: $dF = 0$, $d{*F} = J$)
  * Hodgeho teorie (zobecnění $\exists$ vekt. a skal. potenciálů $\vec{A}$ a φ, $\operatorname{div}\vec{B}=0$, $\operatorname{rot}\vec{E}=0$)
  * de Rhamova kohomologie (uzavřené neexaktní formy → topologické vlastnosti)
* výhody:
  * diferencování bez další struktury (d je jednozn.) [na orient. varietách
  * integrování forem stupně dim. příbuzné int. hustotám, zob. Gauss-Stokes. vět]
  * lze bez indexově (indexy rovnocenné, pořadí mění jen znaménko)

značení:

M — $\Lambda^p M = T^0_{[p]} M$ — bundl tečných anti-sym. p-forem

$\Omega^p M = \mathcal{T}^0_{[p]} M$ — prostor polí (* řez $\Lambda^p M$, v každém bodě jedna)

$\Lambda M = \bigoplus_{p=0}^{d} \Lambda^p M$ — vnější algebra (* součty přes stupně, nehomogen., nemá def. indexy)

ΩM — pole vnější algebry

VNĚJŠÍ SOUČIN

* začínáme s $V_{[p]}$ (ultralokální operace v bodě)
* nezáleží že je tečný $\Lambda^p_x M$, může být i $V^{[p]}$

Def: $\alpha^s \in V_{[p_s]}$, $\sum_s p_s = p$

$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^K = \frac{p!}{p_1!\,p_2!\ldots p_K!}\,\mathcal{A}(\alpha^1 \alpha^2 \ldots \alpha^K)$$

* existují jiné normalizační konvence

* s indexy:

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^K)_{a_1 \ldots a_p} = \frac{p!}{p_1!\,p_2!\ldots p_K!}\,\alpha^1_{[a_1 \ldots a_{p_1}}\,\alpha^2_{a_{p_1+1}\ldots} \cdots \alpha^K_{\ldots a_p]}$$

* vlastnosti

$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) = \alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ — * asociativita (opakovaná antisym., faktory se zkombinují)

$\underset{p}{\alpha}\wedge\underset{q}{\beta} = (-1)^{pq}\,\beta\wedge\alpha$ — * skew-komutativita (může být antikom. i kom.)

* p indexů α se prohazuje s q indexy β, proto se znaménko změní pq-krát

Př: α, β 1-formy, σ 2-forma, ω p-forma

$$\alpha\wedge\beta = -\beta\wedge\alpha, \quad \alpha\wedge\omega = (-1)^p\,\omega\wedge\alpha, \quad \sigma\wedge\omega = \omega\wedge\sigma$$

* antisym. v definici $\wedge$ je trochu zbytečná, protože prohození indexů u jedné formy dává stejný příspěvek
* zápis pomocí kvalitativně odlišných kombinací zruší faktor před $\mathcal{A}$

$$(\alpha^1\wedge\ldots\wedge\alpha^K)_{a_1\ldots a_p} = \sum_{\substack{\text{rozdělení } 1\ldots p \\ \text{na } K \text{ skupin } \sigma^1\ldots\sigma^K \\ \text{délek } p_1 \ldots p_K}} \operatorname{sign}\sigma\;\alpha^1_{a_{\sigma^1_1}\ldots a_{\sigma^1_{p_1}}}\,\alpha^2_{a_{\sigma^2_1}\ldots a_{\sigma^2_{p_2}}}\cdots\alpha^K_{a_{\sigma^K_1}\ldots a_{\sigma^K_{p_K}}}$$

* rozdělujeme indexy na skupiny pro jednotlivé α^j
* sčítáme přes všechna netriviálně různá rozdělení (triviálně různé = liší se prohozením indexů u jedné formy)
* znaménko podle toho jak se rozdělení liší od $1 \dots p$

Př: $(\alpha \wedge \beta)_{\underline{ab}} = \alpha_{\underline{a}} \beta_{\underline{b}} - \alpha_{\underline{b}} \beta_{\underline{a}}$ tzn. $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta - \beta\alpha$ (* až když indexy ve stejném pořadí, tak je v trhnu)

$(\alpha \wedge \sigma)_{\underline{abc}} = \alpha_{\underline{a}} \sigma_{\underline{bc}} - \alpha_{\underline{b}} \sigma_{\underline{ac}} + \alpha_{\underline{c}} \sigma_{\underline{ab}}$
(* nebolí $\updownarrow$ $+ \alpha_{\underline{b}} \sigma_{\underline{ca}}$)

$(\omega \wedge \sigma)_{\underline{abcd}} = \omega_{\underline{ab}} \sigma_{\underline{cd}} - \omega_{\underline{ac}} \sigma_{\underline{bd}} + \omega_{\underline{ad}} \sigma_{\underline{bc}} + \omega_{\underline{bc}} \sigma_{\underline{ad}} - \omega_{\underline{bd}} \sigma_{\underline{ac}} + \omega_{\underline{cd}} \sigma_{\underline{ab}}$ (* 4 indexy na 2 skupiny po 2 $= \binom{4}{2} = 6$ způsobů)

* faktor $\dfrac{p!}{p_1! \dots p_k!}$ ← pokrátí se s $\frac{1}{p!}$ v $\mathcal{A}$
← pokrátí se protože členů které se liší jen prohozením indexů u jedné formy α^j je $p_j!$ (z těchto $p_j!$ členů je netriviální jen jeden)

KONTRAKCE - VNITŘNÍ SOUČIN

Def: $\bullet : V_{[k]} \times V^{[k]} \to \mathbb{R}$

$$\omega \bullet W = \frac{1}{k!} \underset{\text{vše}}{C}\, \omega W = \frac{1}{k!} \omega_{\underline{a_1 \dots a_k}} W^{a_1 \dots a_k}$$

* $\frac{1}{k!}$ je konvence, aby se každá netriv. komponenta započítala jednou $\left(\frac{1}{2!}\omega_{12} W^{12} + \frac{1}{2!}\omega_{21} W^{21} = \omega_{12} W^{12}\right)$

* pozor, navíc $k!$ při projekci $A \in V^k$ na $V^{[k]}$ pomocí $\bullet$, tj. $\mathcal{A}A = k!^{[k]}\delta \bullet A$

Def: $i_u : V_{[k]} \to V_{[k-1]}$, $u \in V$

$$i_u \omega = u \cdot \omega = u \lrcorner \omega = u \bullet \omega$$

* zobecnění $\bullet$ na zúžení přes max. počet indexů
* vždy chápu jako zúžení v sousedících indexech

$$(i_u \omega)_{\underline{a_2 \dots a_p}} = u^n \omega_{\underline{n a_2 \dots a_p}}$$

* vlastnost:

$$\underset{p}{u \cdot (\alpha} \wedge \underset{q}{\beta)} = (u \cdot \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (u \cdot \beta)$$

* formule Leibniz.
* algebraická derivace vůči $\wedge$

$$u^n (\alpha \wedge \beta)_{\underline{n a_2 \dots a_{p+q}}} = u^n \alpha_{\underline{n a_2 \dots a_p}} \wedge \beta_{\underline{a_{p+1} \dots a_{p+q}}} + (-1)^p \alpha_{\underline{a_2 \dots a_{p+1}}} \wedge u^n \beta_{\underline{n a_{p+2} \dots a_{p+q}}}$$

* abych mohl napsat jako zúžení s β, musím se dostat přes p indexů α, to vyrobí $(-1)^p$

$$u \cdot (\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots) = (u \cdot \alpha^1) \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 \wedge \dots + (-1)^{p_1} \alpha^1 \wedge (u \cdot \alpha^2) \wedge \alpha^3 \wedge \dots + (-1)^{p_1 + p_2} \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge (u \cdot \alpha^3) \wedge \dots + \dots$$

* znaménko přes kolik α jsme prošli
* důk: $\wedge$ se rozepíše z definice a dají se k sobě členy kde u působí na jednotlivá α^j

$$\begin{cases} i_a(\omega + \sigma) = i_a \omega + i_a \sigma \\ i_a(\omega \wedge \sigma) = (i_a \omega) \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge (i_a \sigma) \\ i_a f = 0 \quad f \text{ 0-forma} \\ i_a \alpha = a \cdot \alpha \quad \alpha \text{ 1-forma} \end{cases}$$

* číslo lze vytáhnout ven

$\Rightarrow i_a \omega = a \cdot \omega$ pro p-forma

* z akce na 1-formách lze rozšířit na p-formy

* i_a lze vynutit těmito definičními vlastnostmi ($\forall$ taková operace už bude zúžení)

BÁZE

$V \quad e^{a}_{k} \qquad V^{*} \quad e^{k}_{a} \qquad e^{m}_{k}\, e^{l}_{m} = \delta^{l}_{k}$ * báze na V a k ní duální na V^{*}

$V^{[p]} \qquad e_{k_1 \dots k_p} := e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_p} = p!\,\mathcal{A}(e_{k_1} \dots e_{k_p})$
* pro $k_i = k_j$ je nulové
* prohození $k_i \leftrightarrow k_j$ závislé

$k_1 < \dots < k_p \leftarrow$ * tato podmínka vybere pouze netriviální, tzn. zbavím se těch, co se liší prohozením $k_i \leftrightarrow k_j$

* báze tvořena uspořádanými p-ticemi indexů, tzn. $\dim V^{[p]} = \binom{d}{p}$
* speciálně $p = d \Rightarrow \dim {}^{[d]}V = 1$
* kalkulus na sym. tenz. nemá tak pěkné vlastnosti protože počet indexů je neomezený (narozdíl od antisym.)
* podobně pro $V_{[p]}$

$$V_{[p]} \qquad e^{k_1 \dots k_p} := e^{k_1} \wedge \dots \wedge e^{k_p}, \qquad k_1 < \dots < k_p$$

* platí relace duality

$$e_{k_1 \dots k_p} \bullet e^{l_1 \dots l_p} = \delta^{l_1}_{k_1} \dots \delta^{l_p}_{k_p}$$

uspořádané

KOMPONENTY

$\omega \in V_{[p]}$

$$\omega = \omega_{a_1 \dots a_p} e^{a_1} \dots e^{a_p}$$
* komponenty tenzoru, sčítám přes všechny indexy

$$= \omega_{a_1 \dots a_p} \mathcal{A}(e^{a_1} \dots e^{a_p})$$
* ω je anti-sym $\mathcal{A}\omega = \omega$ (komponenty taky)

$$= \sum_{a_1 < \dots < a_p} \omega_{a_1 \dots a_p}\, p!\, \mathcal{A}(e^{a_1} \dots e^{a_p})$$
* zapíšu jen pomocí netriviálních komponent ($\omega_{12} \mathcal{A}(e^1 e^2) + \omega_{21} \mathcal{A}(e^2 e^1) = 2\omega_{12} \mathcal{A}(e^1 e^2)$)
* $p!$ příspěvků stejných

$$= \sum_{a_1 < \dots < a_p} \omega_{a_1 \dots a_p} e^{a_1 \dots a_p}$$
* tady už sčítám přes lin. nez. prvky báze
* výhoda konvence: $\omega_{a_1 \dots a_p}$ jsou komp. jak z hlediska tenzorů tak i forem (nemusí být pravda v jiných konvencích)

$$\omega \bullet W = \sum_{a_1 < \dots < a_p} \omega_{a_1 \dots a_p} W^{a_1 \dots a_p}$$
* vyplývá z relace duality

* na varietě → souř. báze

$$e^{a} = dx^{a} \qquad e_{a} = \frac{\partial}{\partial x^{a}}$$

$$e^{a_1 \dots a_p} = dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

VNĚJŠÍ DERIVACE (* teď operace na polích):

* derivace která nepotřebuje žádnou další strukturu (přenos tenzorů z bodu do bodu)
* pracuje ale jen na anti-sym formách a zvyšuje stupeň forem

tzn. nemá přímočarou interpretaci změny z bodu do bodu

Def: $d: \Omega^p M \to \Omega^{p+1} M$ * mluvíme už o polích a můžeme indexy dole

* na celé algebře ΩM převádí prvky ΩM zpět na prvky ΩM

$$d(\omega + r\sigma) = d\omega + r\, d\sigma, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$d(\underset{p}{\omega} \wedge \underset{q}{\sigma}) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge d\sigma$$ * Leibniz

d je grad. při působení na $\Omega^0 M = \mathcal{F}M$

$dd\omega = 0$ * druhá derivace vyrobí sym. což se zruší s anti-sym.

pozn: Leibniz

$$d_{\underline{a}}(\omega_{\underline{b}\dots} \wedge \sigma_{\underline{c}\dots}) = (d_{\underline{a}}\omega_{\underline{b}\dots}) \wedge \sigma_{\underline{c}\dots} + \omega_{\underline{b}\dots} \wedge (d_{\underline{a}} \sigma_{\underline{c}\dots})$$

* když si d nese index tak ten $(-1)^p$ není, tzn. standardní Leibniz
* pro ukazování indexů musím $\underline{a}$ prokomutovat na začátek

pozn: fce

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$$ * $f \wedge \omega = f\omega$, $\Omega^0 M = \mathcal{F}M$

$f \in \mathcal{F}M$ když nemá indexy, můžu $\wedge$ vypustit

jednoznačnost:

* vlastnosti definují vnější derivaci jednoznačně, ukážeme jejím výpočtem v souřadnicích

$$d\omega = d\Big(\sum_{a_1 < \dots < a_p} \omega_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}\Big)$$

$$= \sum_{a_1 < \dots < a_p} d\omega_{a_1 \dots a_p} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} + \text{členy s } \underbrace{ddx}_{=0}$$

$df = f_{,a} dx^a$

$$= \sum_{a_1 < \dots < a_p} \omega_{a_1 \dots a_p, a}\, dx^a \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

* teď uvolním uspořádanost $a_1, \dots, a_p$ a musím tak přidat $\frac{1}{p!}$

$$= \frac{1}{p!} \omega_{a_1 \dots a_p, a_0} dx^{a_0} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

$$= \sum_{a_0 < \dots < a_p} \frac{(p+1)!}{p!} \omega_{a_1 \dots a_p, a_0} dx^{a_0} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

* přeznačil jsem $a \to a_0$
* přepíšu pomocí netriviálních
* ještě přidám anti-sym explicitně a pokrátím

$$= (p+1) \sum_{a_0 < \dots < a_p} \omega_{[a_1 \dots a_p, a_0]} dx^{a_0} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

$\Rightarrow$ souřadnice $(d\omega)_{a_0 a_1 \dots a_p} = (p+1)\, \omega_{[a_1 \dots a_p, a_0]}$

* $(p+1)$ je tam protože děláme $\wedge$ mezi a_0 a $a_1 \dots a_p$, pzn. platí $d\omega = \nabla \wedge \omega$ (beztorzní ∇, spec. ∂)

* ještě musíme ukázat nezávislost na volbě souř.

nezávislost na souř.: $x^{a'} \leftrightarrow x^a$

$$(d\omega)_{a_0' \dots a_p'} = (p+1)\,\omega_{[a_1' \dots a_p', a_0']}$$

* očividný vztah pro komp. $d\omega$
* komponenty se liší přes matici přechodu, což jsou jen parc. derivace. (v souř. b.)

$$\omega_{a_1' \dots a_p'} = X^{n_1}_{,a_1'} \dots X^{n_p}_{,a_p'}\, \omega_{n_1 \dots n_p} \qquad X^{n}_{,a'} := \frac{\partial x^n}{\partial x^{a'}}$$

* vložením do předchozího dostanu

$$= (p+1)\left(\omega_{n_1 \dots n_p} X^{n_1}_{,[a_1'} \dots X^{n_p}_{,a_p'}\right)_{,a_0']}$$

$$= (p+1)\,\omega_{n_1 \dots n_p,[a_0'} X^{n_1}_{,a_1'} \dots X^{n_p}_{,a_p']} + \text{členy s } \underbrace{X_{,a_j' a_0'}}_{=0 \text{ po antisymetrizování}}$$

* převedu der. podle a_0' na der. podle n_0
* parciální derivace jsou sym.

$$= (p+1)\,\omega_{n_1 \dots n_p, n_0} X^{n_0}_{,[a_0'} X^{n_1}_{,a_1'} \dots X^{n_p}_{,a_p']}$$

$$= \underbrace{(p+1)\,\omega_{[n_1 \dots n_p, n_0]}}_{(d\omega)_{n_0 \dots n_p}} X^{n_0}_{,a_0'} \dots X^{n_p}_{,a_p'}$$

* antisym jsem přesunul z $a_0' \dots a_p'$ na $n_0 \dots n_p$
* tzn. transformuje se tenzorově
* nebylo samozřejmé - vyrušení extra člen jen kvůli antisymetrizaci

Př

$$d_a f = f_{,a}$$

$$d_a f_b = \alpha_{b,a} - \alpha_{a,b}$$

$$d_a \sigma_{bc} = \sigma_{bc,a} + \sigma_{ca,b} + \sigma_{ab,c}$$

* jiný zápis souřadnic: $(d\omega)_{a_0 \dots a_p} = d_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p}$
* $(p+1) \cdot \frac{1}{(p+1)!} = \frac{1}{p!}$, což se zruší při zápisu $p!$ netriviálních

CARTANOVY VZORCE

* vnější derivace se převádí na jednodušší operace když zúžím s vektory
* nejpraktičtější verze (γ … 1-forma), převádí na operace, které jsme znali dříve

$$a \cdot (d\underbrace{\gamma}_{\text{1-forma}}) \cdot b = a \cdot d\underbrace{(b \cdot \gamma)}_{\text{0-forma}} - b \cdot d\underbrace{(a \cdot \gamma)}_{\text{0-forma}} - [a,b] \cdot \gamma$$

důk: (cv.)

1) $\gamma = df$

PS: $\underbrace{a \cdot d(b \cdot df) - b \cdot d(a \cdot df)}_{a[b[f]] - b[a[f]] = [a,b][f] = [a,b] \cdot df} - [a,b] \cdot df = 0$ $\quad [a,b] \in TM$

* def. Lie závorky (je derivace na FM, tzn. TM)

2) $\gamma = h\,df$

LS: $a \cdot d(h\,df) \cdot b = a \cdot (dh \wedge df) \cdot b = (a \cdot dh)(b \cdot df) - (a \cdot df)(b \cdot dh)$

PS: $a \cdot d(b \cdot h\,df) - b \cdot d(a \cdot h\,df) - [a,b] \cdot h\,df$

$$= (a \cdot dh)(b \cdot df) + h\, a \cdot d(b \cdot df)$$
$$- (b \cdot dh)(a \cdot df) - h\, b \cdot d(a \cdot df)$$
$$- h\left(a \cdot d(b \cdot df) - b \cdot d(a \cdot df)\right)$$
$$= LS$$

* první 2 členy jsem rozderivoval $d(hg) = (dh)g + h\,dg$
* viz 1)

3) obecné ω z linearity ($\omega = \omega_a dx^a$)

* obecnější vzorec (ω ... p-forma)

$$\left(d_{\underline{a}_0}\,\omega_{\underline{n}_1\ldots\underline{n}_p}\right) a_0^{n_0} a_1^{n_1} \ldots a_p^{n_p} = \sum_{0\le k\le p} (-1)^k a_k^{n_k}\, d_{\underline{n}_k}\underbrace{\left(\omega_{\underline{n}_0\ldots\underline{n}_p} a_0^{n_0}\ldots a_p^{n_p}\right)}_{\substack{\text{mimo } k\\ \text{0-forma}}}$$

* důkaz ve skriptech

$$+ \sum_{0\le k\le l\le p} (-1)^{k+l} [a_k, a_l]^{\underline{n}}\, \underbrace{\omega_{\underline{n}\,\underline{n}_0\ldots\underline{n}_p} a_0^{n_0}\ldots a_p^{n_p}}_{\substack{\text{mimo } k,l\\ \text{1-forma}}}$$

UZAVŘENÉ A EXAKTNÍ FORMY

Def: ω je uzavřená $\quad d\omega = 0 \quad \Omega_c^p M$

ω je exaktní $\quad \exists\sigma: \omega = d\sigma \quad \Omega_e^p M$ $\quad$ * dodefinuji $\Omega_e^0 M = \{0\}$ exaktní fce nejsou (až na 0)

tzn: $\Omega_c^p M = \ker d$ $\quad$ * zřejmě:

$\Omega_e^p M = \operatorname{img} d$ $\quad$ ω exaktní $\rightarrow$ ω uzavřená

* $dd\omega = 0$

Def: (* detailněji na GM2)

- de Rhamova kohomologie:

$$H^p(M) = \Omega_c^p M / \Omega_e^p M$$

* třídy ekviv.: uzavř. lišící se o exaktní identifikuju

$[\omega] = \omega + \Omega_e^p M, \ \omega \in \Omega_c^p M$

* tzn. exaktní identifikovány s 0

- Bettiho číslo

$$b^p(M) = \dim H^p(M)$$

* b^0 počet komponent

b^p nestáhnutelné S^p ($p=1$ ... nestáhnutelné smyčky)

- Eulerova charakteristika

$$\chi(M) = \sum_{p=0,\ldots,d} (-1)^p b^p(M)$$

Poincare-ho Lemma

Pro topologicky triviální M (např. kontrahovatelné)

ω uzavřená $\Rightarrow$ ω exaktní $\quad$ (* něco jako existence potenciálu)

tzn. $b^0(M) = 1$

$b^p(M) = 0 \quad p > 0$

* kontrahovatelnost = $\exists$ spojité zobrazení spojitě stahující všechny body do jednoho

* pokud prostor má díry tak neplatí, kohomologie popisuje jak velké jsou díry (podle stupně p)

Př: $\mathbb{R}^n \quad b^0 = 1,\ b^p = 0,\ p > 0$

$S^n \quad b^0 = b^n = 1,\ b^p = 0,\ n > p > 0$

$T^2 \quad b^0 = 1,\ b^1 = 2,\ b^2 = 1$

HOLONOMNOST BÁZE

ekvivalentní tvrzení

(i) e_k je holonomní tj. $\exists x^k:\ e_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$

(ii) e^k jsou exaktní tj. $\exists x^k:\ e^k = dx^k$

* báze jsou souřadnicové

(iii) $de^k = 0 \quad \forall k$ pro top. triv. oblasti

(iv) $[e_k, e_l] = 0 \quad \forall k,l$

důk: (i)⇔(ii) duálnost $\frac{\partial}{\partial x^k}$ a dx^k

(ii)⇔(iii) Poincarého lemma

(iii)⇔(iv) z Cartanova vzorce

$$e_k\cdot(de^m)\cdot e_l = e_k\cdot \cancelto{0}{d(\underbrace{e_l\cdot e^m}_{\delta^m_l})} - e_l\cdot \cancelto{0}{d(\underbrace{e_k\cdot e^m}_{\delta^m_k})} - [e_k,e_l]\cdot e^m$$

fix. k,l: $de^m = 0\ \forall m \Rightarrow [e_k,e_l]\cdot e^m = 0\ \forall m \Rightarrow [e_k,e_l]=0$ * to lze pro $\forall k,l$

fix. m: $[e_k,e_l]=0\ \forall k,l \Rightarrow e_k\cdot(de^m)\cdot e_l = 0\ \forall k,l \Rightarrow de^m = 0$ * to lze pro $\forall m$

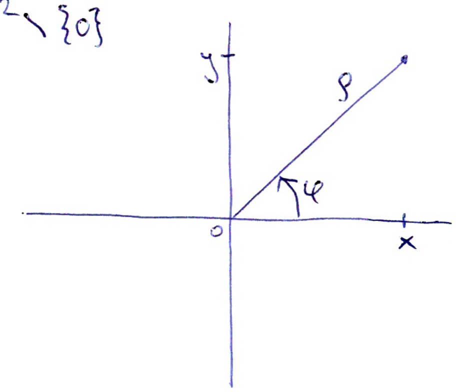
*Vzhledem k tomu že platí pro zúžení se všemi prvky báze tak platí i bez oblepení báze

* něco podobného (ale složitější) budeme mít ve Frobeniově větě

* (iii) a (iv) jsou jednoduché testy na to, že báze je souřadnicová

PŘ UZAVŘENOST A EXAKTNOST

$E^2 \setminus \{0\}$



$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

ověřte uzavřenost a exaktnost formy

$$\omega = -\frac{y}{\rho^2}\,dx + \frac{x}{\rho^2}\,dy \quad \text{na } E^2\setminus\{0\}$$

$$\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)_{,x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$d\omega = -d\frac{y}{\rho^2}\wedge dx + d\frac{x}{\rho^2}\wedge dy$$
$$= \frac{1}{\rho^2}\left(-dy\wedge dx + dx\wedge dy\right)$$
$$+ \frac{2y^2}{\rho^4}\,dy\wedge dx - \frac{2x^2}{\rho^4}\,dx\wedge dy$$
$$= \left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^4} - \frac{2x^2}{\rho^4}\right)dx\wedge dy = 0$$

* uzavřená na $E^2\setminus\{0\}$

$$d\varphi = d\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\left(\frac{1}{x}\,dy - \frac{y}{x^2}\,dx\right) = \frac{1}{\rho^2}\left(x\,dy - y\,dx\right)$$

* φ není hladké na $E^2\setminus\{0\}$, při oběhnutí nespojité (na $y=0, x>0$)

$\Rightarrow$ ω není exaktní na $E^2\setminus\{0\}$, lokálně exaktní je (v okolí, které nejde kolem $\{0\}$)

* netriviálnost uzavřených, co nejsou exaktní charakterizuje přítomnost díry (globální/topologický problém)

* na E^2 bez celé polopřímky φ může být hladké a ω exaktní; takový prostor je topologicky triviální (nemá problém)

PŘ KŘIVOST NA S^2 – ROVNICE STRUKTURY (* bude později na GM 1/2)

S^2 $\quad g = r_0^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$
$\quad = e^\vartheta e^\vartheta + e^\varphi e^\varphi$

* co je to metrika a proč na S^2 můžu vzít tuto metriku bude později

$e^\vartheta = r_0 d\vartheta \qquad e^\varphi = r_0 \sin\vartheta\, d\varphi$

* jsou ortonormální (taky bude později)
= kolmé na sebe a jednotkové
v řeči $g^{-1} = e_\vartheta e_\vartheta + e_\varphi e_\varphi$
* e_ϑ, e_φ duální (orton.) báze
$e^k \cdot e_l = \delta^k_l$

1) spočtěte de^ϑ a de^φ

$de^\vartheta = 0$

$de^\varphi = r_0 \cos\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi = \frac{1}{r_0} \cot\vartheta\, e^\vartheta \wedge e^\varphi$

2) nalezněte 1-formy konexe $\omega^k{}_l$

$\omega^k{}_l = -\omega^l{}_k$

$de^k + \omega^k{}_l \wedge e^l = 0 \qquad$ 1. Cart. rov. strukt. $\qquad$ * určují $\omega^k{}_l$

zřejmě

$\omega^\vartheta{}_\vartheta = 0, \ \omega^\varphi{}_\varphi = 0, \quad \omega^\vartheta{}_\varphi = -\omega^\varphi{}_\vartheta$ jediná nezávislá 1-forma

$\Downarrow$

$de^\vartheta = -\omega^\vartheta{}_\varphi \wedge e^\varphi \Rightarrow 0 = \omega^\vartheta{}_\varphi \wedge e^\varphi \Rightarrow \omega^\vartheta{}_\varphi = \alpha\, e^\varphi$ $\qquad$ * α skalár $(f\vartheta)$

$de^\varphi = -\omega^\varphi{}_\vartheta \wedge e^\vartheta \Rightarrow \frac{1}{r_0}\cot\vartheta\, e^\vartheta \wedge e^\varphi = +\alpha\, e^\varphi \wedge e^\vartheta \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{r_0}\cot\vartheta$

$\Rightarrow \omega^\vartheta{}_\varphi = -\omega^\varphi{}_\vartheta = -\frac{1}{r_0}\cot\vartheta\, e^\varphi = -\cos\vartheta\, d\varphi$

3) spočtěte 2-formy křivosti $\Omega^k{}_l$

$\Omega^k{}_l = d\omega^k{}_l + \omega^k{}_j \wedge \omega^j{}_l \qquad$ 2. Cart. rov. struktury

$\Omega^k{}_l = -\Omega^l{}_k$

zřejmě

$\Omega^\vartheta{}_\vartheta = 0, \ \Omega^\varphi{}_\varphi = 0, \ \Omega^\vartheta{}_\varphi = -\Omega^\varphi{}_\vartheta$ jediná nezávislá 2-forma

$\Omega^\vartheta{}_\varphi = d\omega^\vartheta{}_\varphi = -d(\cos\vartheta\, d\varphi) = \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi = \frac{1}{r_0^2} e^\vartheta \wedge e^\varphi$

4) určete $R_{abcd} = g_{cn} R_{ab}{}^n{}_d$, tj. ${}^\flat R$

$R \qquad R_{ab}{}^c{}_d = \Omega_{ab}{}^k{}_l\, e_k^c\, e^l_d \qquad$ Riem. tenzor

zřejmě

$R = \Omega^\vartheta{}_\varphi\, e_\vartheta e^\varphi + \Omega^\varphi{}_\vartheta\, e_\varphi e^\vartheta$
$\quad = \frac{1}{r_0^2} e^\vartheta \wedge e^\varphi (e_\vartheta e^\varphi - e_\varphi e^\vartheta)$

${}^\flat R = \frac{1}{r_0^2} e^\vartheta \wedge e^\varphi\ e^\vartheta \wedge e^\varphi \qquad e_\vartheta \cdot g = e^\vartheta, \ e_\varphi \cdot g = e_\varphi$

5) určete $R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi}$

$$^bR = r_0^2 \sin^2\varphi \, d\vartheta \wedge d\varphi \, d\vartheta \wedge d\varphi \qquad {}^bR = \sum_{\substack{a<b\\c<d}} R_{abcd}\, dx^a \wedge dx^b \, dx^c \wedge dx^d$$

$$\Rightarrow R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = r_0^2 \sin^2\varphi$$

6) určete Ric a $\mathcal{R}$ (*Ricciho tenzor a skalární křivost)

$$Ric_{\underline{ab}} = R_{\underline{na}}{}^{\underline{n}}{}_{\underline{b}} \qquad \mathcal{R} = g^{-1ab} Ric_{\underline{ab}}$$

$$Ric = \frac{1}{r_0^2}\left(e^{\vartheta}_{\underline{n}} e^{\varphi} - e^{\varphi}_{\underline{n}} e^{\vartheta}\right)\left(e^{\underline{n}}_{\vartheta} e^{\varphi} - e^{\underline{n}}_{\varphi} e^{\vartheta}\right)$$

$$= \frac{1}{r_0^2}\left(e^{\varphi}e^{\varphi} + e^{\vartheta}e^{\vartheta}\right) = \frac{1}{r_0^2}\, g \qquad \Rightarrow Ric_{\vartheta\vartheta} = 1, \; Ric_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{r_0^2}\, g^{-1\underline{ab}} g_{\underline{ab}} = \frac{2}{r_0^2} \qquad K = \frac{\mathcal{R}}{2} = \frac{1}{r_0^2} \quad \text{(*Gaussova křivost)}$$

* v $d=2$ křivost popsána jednou komponentou (tj. $\mathcal{R}$)

* zde je navíc konstantní

7) určete $R_{\vartheta\varphi}{}^{\vartheta}{}_{\varphi}$ a $R_{\vartheta\varphi}{}^{\varphi}{}_{\vartheta}$

$e_k \cdot e^l = \delta^l_k$ duální báze

$$\left.\begin{aligned} e_\vartheta \cdot e^\vartheta &= 1 \\ e_\vartheta \cdot e^\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow e_\vartheta = \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \qquad \left.\begin{aligned} e_\varphi \cdot e^\varphi &= 0 \\ e_\varphi \cdot e^\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow e_\varphi = \frac{1}{r_0 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$\Downarrow$

$$R = d\vartheta \wedge d\varphi \left(\sin^2\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} d\varphi - \frac{\partial}{\partial\varphi} d\vartheta\right)$$

$$\Rightarrow R_{\vartheta\varphi}{}^{\vartheta}{}_{\varphi} = \sin^2\vartheta, \quad R_{\vartheta\varphi}{}^{\varphi}{}_{\vartheta} = -1$$